

1 Algebraische Grundlagen

Binomische Formeln	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$	$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

Absolutbetrag	$ x = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$
----------------------	--

Wurzeln und Potenzen	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	$\sqrt{a} \geq 0$	$\sqrt{a^2} = a $
	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ Faktoren}} = a$
	$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$	$a^0 = 1$	$a^1 = a$
	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
	$\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	

Logarithmen	$\log_b a = z \Leftrightarrow b^z = a$	
	$\log_b (uv) = \log_b u + \log_b v$	$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
	$\log_b u^z = z \cdot \log_b u$	$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

Geradengleichung	$y = m \cdot x + t$	(allgemeine Form)
	$y = m \cdot (x - x_0) + y_0$	(Punkt-Steigungs-Form)

Parabelgleichung	$y = ax^2 + bx + c$	(allgemeine Form)
	$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$	(Scheitelform)
	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	(Linearfaktorform)

Lösungsformel für die quadratische Gleichung	$ax^2 + bx + c = 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
---	--

2 Analysis

**Symmetrie
 bezüglich des
 Koordinaten-
 systems**

$$\left. \begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow$$

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse
 (f heißt dann gerade Funktion)

$$\left. \begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow$$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung
 (f heißt dann ungerade Funktion)

**Differenzen-
 quotient**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(Sekantensteigung bzgl. x_0 und x)

**Ableitung $f'(x_0)$
 (Differential-
 quotient)**

Besitzt der Graph G_f an der Stelle x_0 eine eindeutige Tangente, so wird die Steigung dieser Tangente mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Dann gilt:

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0)$$

Schreibweisen:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

**Ableitung der
 Grundfunktionen**

$$\frac{d}{dx}(x^r) = r \cdot x^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^r}\right) = -\frac{r}{x^{r+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Ableitungsregeln

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$f(x) = c \cdot u(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$f(x) = u(v(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Monotoniekriterium	$f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ fällt streng monoton in I. $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ steigt streng monoton in I.
Art von relativen Extrema	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum. $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
Graphenkrümmung	$f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt. $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt.
Wendepunkt	Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
Terrassenpunkt	Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	<p>Ist f eine in $[a; b]$ stetige Funktion, so ist die Integralfunktion $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar und F_a ist eine Stammfunktion von f, d. h. $F_a'(x) = f(x)$.</p> <p>Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt:</p> $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
Partielle Integration	$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$
Integration durch Substitution	$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{mit } x = g(t)$

**Volumen eines
 Rotationskörpers**

Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$$

Rotation um die y-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(x))^2 dx$$

**Unbestimmte
 Integrale**

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln x dx = -x + x \cdot \ln x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C$$

wobei F eine
 Stammfunktion von f ist

Grenzwerte

für $r > 0$ gilt:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow x^r \cdot e^x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x^r}{e^x} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\ln x}{x^r} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow x^r \cdot \ln x \rightarrow 0$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ω sei der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und $A, B \subseteq \Omega$ seien zwei beliebige Ereignisse.

Gesetze der Mengenalgebra

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= \Omega \setminus A & A \cap \bar{A} &= \{ \} \\ \bar{\bar{A}} &= A & A \setminus B &= A \cap \bar{B} \end{aligned}$$

Gesetze von De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Unvereinbarkeit

$$A \cap B = \{ \} \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ heißen unvereinbar.}$$

Ereigniswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(\{ \}) &= 0 & P(\Omega) &= 1 \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

Satz von Sylvester

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen

$$\begin{aligned} P_A(B) &= P(B) \quad \text{oder} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ \Leftrightarrow & A \text{ und } B \text{ sind stochastisch unabhängig.} \end{aligned}$$

Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Der Wert $n!$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen zu bilden.

Laplace-Experiment

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes gleich wahrscheinlich sind.

$$\text{Es gilt dann: } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

**Maßzahlen
von Zufallsgrößen**

Die Zufallsgröße X nehme die Werte x_1, x_2, \dots, x_n jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an.

Dann gilt:

• **Erwartungswert**

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \\ &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n\end{aligned}$$

• **Varianz**

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \\ &= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad (\text{Verschiebungsregel})$$

• **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p .

Dann gilt:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt Binomialverteilung.
- X heißt binomialverteilt, genauer $B(n; p)$ -verteilt.

Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n; p)$, so gilt:

- $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, \dots, n$
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypothesentest

Beim Testen der Nullhypothese H_0 in einem Signifikanztest mit Signifikanzniveau α können zwei Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
- Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Das Signifikanzniveau α des Tests ist die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

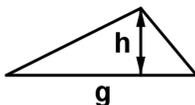
4 Geometrie

Flächengeometrie

A: Flächeninhalt
 U: Umfang

Allgemeines Dreieck

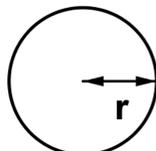
$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$



Kreis

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

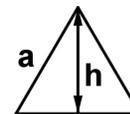
$$A = r^2 \cdot \pi$$



Gleichseitiges Dreieck

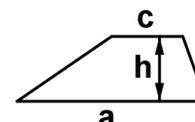
$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$



Trapez

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$



Raumgeometrie

V: Volumen
 G: Grundfläche
 M: Mantelfläche
 O: Oberfläche

Prisma

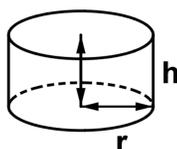
$$V = G \cdot h$$



Gerader Kreiszyylinder

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

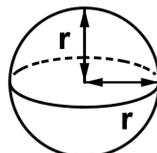
$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$



Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$



Pyramide

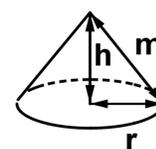
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$



Gerader Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$M = r \cdot \pi \cdot m$$



Geradengleichung

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

(Parameterform)

Ebenengleichung

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

(Parameterform)

$$E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$$

(Koordinatenform)

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

(Normalenform)

$$E: \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$$

(Achsenabschnittsform)

mit den Achsenschnittpunkten

$$S(s | 0 | 0), T(0 | t | 0), U(0 | 0 | u)$$

Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

**Eigenschaften
 und Anwendungen
 des Skalarprodukts**

- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
 mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

**Eigenschaften
 und Anwendungen
 des Vektorprodukts**

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} .
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
- Maßzahl F des Flächeninhalts des Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
- Maßzahl V des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{AB} \circ (\vec{AC} \times \vec{AD})|$

**Lineare
 Unabhängigkeit**

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig.
- \Leftrightarrow Die Gleichung $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$
 ist nur mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar.
- $\Leftrightarrow \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

**Besondere
 Punkte**

- Mittelpunkt M einer Strecke \overline{AB} : $\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB})$
- Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC: $\vec{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

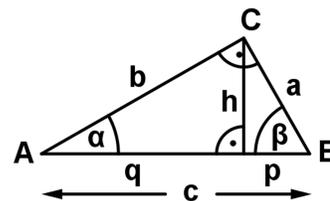
5 Trigonometrische Grundlagen

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

Kathetensatz: $a^2 = cp$; $b^2 = cq$



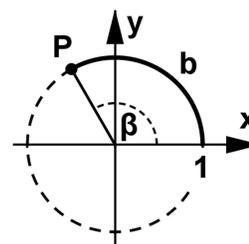
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$

Beziehungen am Einheitskreis

- $P(x_p | y_p)$ liegt auf dem Einheitskreis

$$\Rightarrow \cos \beta = x_p \text{ und } \sin \beta = y_p$$

- $\frac{b}{\pi} = \frac{\beta}{180^\circ}$



Trigonometrische Beziehungen

$$(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$$

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

Additionstheoreme

$$\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\cos(2\varphi) = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \varphi)$$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Stand der Merkhilfe: 11.09.2017

Merkhilfe Mathematik



Technik

Merkhilfe Mathematik



Technik

Merkhilfe Mathematik



Technik