

**1 Algebraische Grundlagen**

<b>Binomische Formeln</b>	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$	$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

<b>Absolutbetrag</b>	$ x  = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$
----------------------	--

<b>Wurzeln und Potenzen</b>	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	$\sqrt{a} \geq 0$	$\sqrt{a^2} =  a $
	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ Faktoren}} = a$
	$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$	$a^0 = 1$	$a^1 = a$
	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	

<b>Logarithmen</b>	$\log_b a = z \Leftrightarrow b^z = a$	
	$\log_b (uv) = \log_b u + \log_b v$	$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
	$\log_b u^z = z \cdot \log_b u$	$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

<b>Geradengleichung</b>	$y = m \cdot x + t$	(allgemeine Form)
	$y = m \cdot (x - x_0) + y_0$	(Punkt-Steigungs-Form)

<b>Parabelgleichung</b>	$y = ax^2 + bx + c$	(allgemeine Form)
	$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$	(Scheitelform)
	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	(Linearfaktorform)

<b>Lösungsformel für die quadratische Gleichung</b>	$ax^2 + bx + c = 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
---	---

**2 Analysis**

<b>Symmetrie bezüglich des Koordinaten- systems</b>	$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$	} $\Rightarrow$	$G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse (f heißt dann gerade Funktion)
	$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$		$G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung (f heißt dann ungerade Funktion)

<b>Grenzwerte</b>	für $r > 0$ gilt:	
	$x \rightarrow -\infty \Rightarrow x^r \cdot e^x \rightarrow 0$	$x \rightarrow 0 \Rightarrow x^r \cdot \ln x \rightarrow 0$
	$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\ln x}{x^r} \rightarrow 0$	$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x^r}{e^x} \rightarrow 0$

<b>Differenzen- quotient</b>	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	(Sekantensteigung bzgl. $x_0$ und $x$ )
----------------------------------	---------------------------------	---

<b>Ableitung <math>f'(x_0)</math> (Differential- quotient)</b>	Besitzt der Graph $G_f$ an der Stelle $x_0$ eine eindeutige Tangente, so wird die Steigung dieser Tangente mit $f'(x_0)$ bezeichnet.	
	Dann gilt:	$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0)$
	Schreibweisen:	$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$
		$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

<b>Ableitung der Grundfunktionen</b>	$\frac{d}{dx}(x^r) = r \cdot x^{r-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^r}\right) = -\frac{r}{x^{r+1}}$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

<b>Ableitungsregeln</b>	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
	$f(x) = c \cdot u(x)$	$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$
	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

<b>Monotoniekriterium</b>	$f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ fällt streng monoton in I. $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ steigt streng monoton in I.	
<b>Art von relativen Extrema</b>	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle $x_0$ ein relatives Minimum. $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle $x_0$ ein relatives Maximum.	
<b>Graphenkrümmung</b>	$f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt. $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt.	
<b>Wendepunkt</b>	Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle $x_0$ das Vorzeichen, so hat $G_f$ an der Stelle $x_0$ einen Wendepunkt.	
<b>Terrassenpunkt</b>	Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle $x_0$ das Vorzeichen, so hat $G_f$ an der Stelle $x_0$ einen Terrassenpunkt.	
<b>Bestimmtes Integral</b>	$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	
<b>Partielle Integration</b>	$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$	
<b>Integration durch Substitution</b>	$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$ mit $x = g(t)$	
<b>Unbestimmte Integrale</b>	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + C$ $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$ $\int \ln x dx = -x + x \cdot \ln x + C$ $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$ wobei F eine Stammfunktion von f ist

### 3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\Omega$  sei der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und  $A, B \subseteq \Omega$  seien zwei beliebige Ereignisse.

<b>Gesetze der Mengenalgebra</b>	$\bar{\bar{A}} = A$ $\bar{A} = \Omega \setminus A$	$A \cap \bar{A} = \{ \}$ $A \setminus B = A \cap \bar{B}$
<b>Gesetze von De Morgan</b>	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
<b>Unvereinbarkeit</b>	$A \cap B = \{ \} \Leftrightarrow A$ und $B$ heißen unvereinbar.	
<b>Ereigniswahrscheinlichkeiten</b>	$P(\{ \}) = 0$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$P(\Omega) = 1$
<b>Satz von Sylvester</b>	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit</b>	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	
<b>Unabhängigkeit von zwei Ereignissen</b>	$P_A(B) = P(B) \quad \text{oder} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\Leftrightarrow A$ und $B$ sind stochastisch unabhängig.	
<b>Fakultät</b>	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ <p>Der Wert <math>n!</math> gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, <math>n</math> unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.</p>	
<b>Binomialkoeffizient</b>	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ <p>Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit <math>n</math> Elementen Teilmengen mit <math>k</math> Elementen zu bilden.</p>	
<b>Laplace-Experiment</b>	<p>Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes gleich wahrscheinlich sind.</p> <p>Es gilt dann: <math display="block">P(A) = \frac{ A }{ \Omega }</math></p>	

**Maßzahlen  
von Zufallsgrößen**

Die Zufallsgröße  $X$  nehme die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  an.

Dann gilt:

• **Erwartungswert**

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \\ &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n\end{aligned}$$

• **Varianz**

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \\ &= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad (\text{Verschiebungsregel})$$

• **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

**Binomialverteilung**

Eine Zufallsgröße  $X$  beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge  $n$  mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ .

Dann gilt:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  heißt Binomialverteilung.
- $X$  heißt binomialverteilt, genauer  $B(n; p)$ -verteilt.

Ist eine Zufallsgröße  $X$  binomialverteilt nach  $B(n; p)$ , so gilt:

- $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  für  $k = 0, 1, \dots, n$
- Erwartungswert:  $E(X) = n \cdot p$
- Varianz:  $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

**Hypothesentest**

Beim Testen der Nullhypothese  $H_0$  in einem Signifikanztest mit Signifikanzniveau  $\alpha$  können zwei Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art:  $H_0$  wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
- Fehler 2. Art:  $H_0$  wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Das Signifikanzniveau  $\alpha$  des Tests ist die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

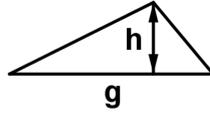
**4 Geometrie**

**Flächengeometrie**

A: Flächeninhalt  
 U: Umfang

Allgemeines Dreieck

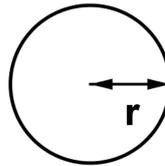
$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$



Kreis

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

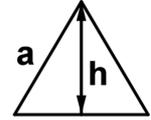
$$A = r^2 \cdot \pi$$



Gleichseitiges Dreieck

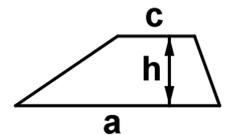
$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$



Trapez

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$



**Raumgeometrie**

V: Volumen  
 G: Grundfläche  
 M: Mantelfläche  
 O: Oberfläche

Prisma

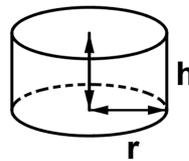
$$V = G \cdot h$$



Gerader Kreiszylinder

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

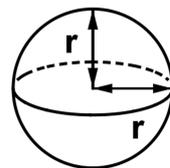
$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$



Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$



Pyramide

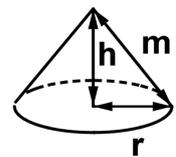
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$



Gerader Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$M = r \cdot \pi \cdot m$$



**Geradengleichung**

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

(Parameterform)

**Ebenengleichung**

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

(Parameterform)

$$E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$$

(Koordinatenform)

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

(Normalenform)

$$E: \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$$

(Achsenabschnittsform)

mit den Achsenschnittpunkten

$$S(s|0|0), T(0|t|0), U(0|0|u)$$

**Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$**       $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

**Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts**

- zueinander senkrechte Vektoren:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors:  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor:  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren:  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$   
mit  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

**Vektorprodukt**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

**Eigenschaften und Anwendungen des Vektorprodukts**

- $\vec{a} \times \vec{b}$  steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$  mit  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
- Maßzahl F des Flächeninhalts des Dreiecks ABC:  $F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
- Maßzahl V des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCD:  $V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \right|$

**Lineare Unabhängigkeit**

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  sind linear unabhängig.
- $\Leftrightarrow$  Die Gleichung  $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$   
ist nur mit  $\lambda = \mu = \nu = 0$  lösbar.
- $\Leftrightarrow \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

**Besondere Punkte**

- Mittelpunkt M einer Strecke  $\overline{AB}$ :  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
- Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC:  $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

**5 Trigonometrische Grundlagen**

**Rechtwinkliges  
Dreieck**

Satz des Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$

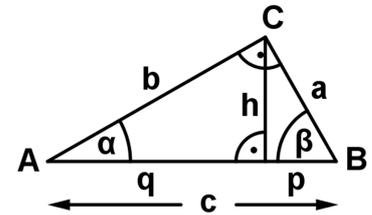
Höhensatz:  $h^2 = pq$

Kathetensatz:  $a^2 = cp$ ;  $b^2 = cq$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$

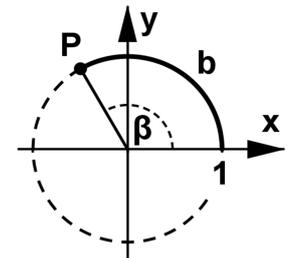


**Beziehungen  
am Einheitskreis**

- $P(x_p | y_p)$  liegt auf dem Einheitskreis

$$\Rightarrow \cos \beta = x_p \text{ und } \sin \beta = y_p$$

- $\frac{b}{\pi} = \frac{\beta}{180^\circ}$



**Trigonometrische  
Beziehungen**

$$(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$$

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

**Additions-  
theoreme**

$$\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\cos(2\varphi) = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \varphi)$$

**Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.**  
***Stand der Merkhilfe: 08.09.2017***